No. 1 Date 11/11/2019

Αριθμητική Ανάλυση

Θεώρημα Ολικής Σύγκλισης

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και $f: [\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \infty)$ με $f(\alpha) < 0$, $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ $\forall x \in [\alpha, \infty)$. Τότε υπάρχει μοναδική ρίζα $\rho \in (\alpha, \infty)$ και η μέθοδος Newton συγκλίνει στο ρ για κάθε $x_0 \in [\alpha, \infty)$.

Αρκεί να βρούμε $b > \alpha$, τέτοιο ώστε $f(b) > 0$. Αναπτύσσω κατά Taylor την $f(b)$ στο α: $f(b) = f(\alpha) + (b-\alpha) f'(\alpha) + \frac{(b-\alpha)^2}{2} f''(\xi) > f(\alpha) + (b-\alpha) f'(\alpha)$

Τότε αν $f(\alpha) + (b-\alpha) f'(\alpha) > 0$ και $f'(b) > 0$

Επομένως $b > \alpha - \frac{f(\alpha)}{f(b)} > \alpha$

Άρα υπάρχει b που $f(b) > 0$

Η μοναδικότητα αποδεικνύεται από το ότι $f'(x) > 0$ $\forall x \in [\alpha, \infty)$.

Έστω $\alpha \leq x_0 < \rho$. Τότε $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0$

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1)$$

$$= \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} f''(\xi) > 0 \Rightarrow x_1 > \rho$$

Θεωρώ ότι $x_0 > \rho$. Τότε $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$

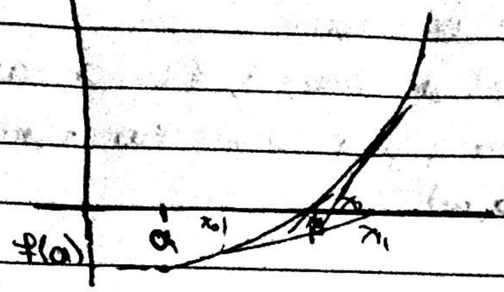
$$f(x_1) = \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} f''(\xi) > 0, \quad \xi \in (x_1, x_0) \Rightarrow x_1 > \rho \; ;$$

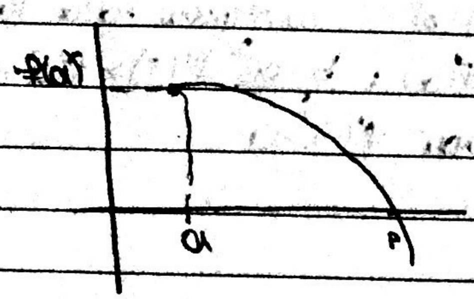
Η ακολουθία $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι μετά τον πρώτο όρο γν. φθίνουσα ακολουθία, φραγμένη από κάτω από το ρ. Άρα συγκλίνουσα.

Έστω y το όριο της $y \geq \rho$

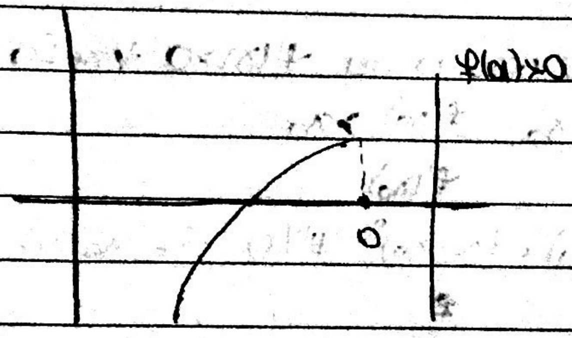
Τότε $y = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(y) = 0 \Leftrightarrow y = \rho$.



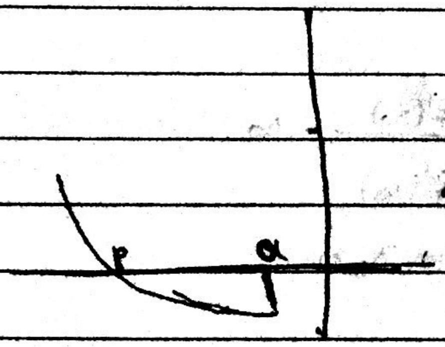


$f(a)>0$, $f'(x)<0$, $f''(x)<0$



$f(a)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)<0$

$f:(-\infty, a]$



$f(a)<0$, $f'(x)<0$, $f''(x)>0$

$f:(-\infty, a] \to \mathbb{R}$

Τι γίνεται αν x^* πολλαπλή ρίζα.

Αν x^* ρίζα της f πολλαπλότητας $m>1$ και $f \in C^m(I)$, I κλειστή περιοχή του x^*, τότε η μέθοδος Newton συγκλίνει τοπικά στο x^* αλλά η σύγκλιση είναι γραμμική. $f^{(k)}(x^*)=0$, $k=0,1,\dots,m-1$.

$$x_{n+1}-x^* = x_n - x^* - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x^* - \frac{\frac{(x_n-x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_{n_1})}{\frac{(x_n-x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(\xi_{n_2})} =$$

$$= x_n - x^* - \frac{x_n - x^*}{m} \cdot \frac{f^{(m)}(\xi_{n_1})}{f^{(m)}(\xi_n)}$$

$$\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = 1 - \frac{1}{m}\,\frac{f^{(m)}(\xi_{n_1})}{f^{(m)}(\xi_{n_2})}$$

$$\lim \frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = 1 - \frac{1}{m} \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(m)}(\xi_{n_1})}{f^{(k)}(\xi_{n_2})} = 1 - \frac{1}{m} = <1 \neq 0$$

∃περιοχ. I του x^* και $1<1$

ώστε να 'ναι συνεχής.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x^* ρίζα πολλ. m της f και $f \in C^{m+1}(I)$, I κλειστή περιοχή του x^*. Τότε η ακολουθία που παράγεται από

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 \in I$$

, συγκλίνει στο x^* και η σύγκλιση είναι τετραγων.

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x^* - m\frac{\frac{(x_n-x^*)^m}{m!} + \frac{(x_n-x^*)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi_n)}{\frac{(x_n-x^*)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{(x_n-x^*)^m}{m!} f^{(m+1)}(\xi_n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \frac{1}{m(m+1)} \cdot \frac{f^{(m+1)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)} \;\Big|\; \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}.$$

Μέθοδος Newton για εύρεση της $\sqrt{a}$, $a>0$

$$f(x) = x^2 - a = 0, \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2-a}{2x}$$

$$= \frac{2x^2 - x^2 + a}{2x} = \frac{x^2 + a}{2x} = 0{,}5\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

$x_{n+1} = 0{,}5\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $x_0 > 0$ συγκλίνει.

$f(x)' = x^2 - a$, $f(0) = -a < 0$	Ισχυει το Θ.Ο.Σ. στο διαστημα
$f''(x) = 2x > 0$, $x \in (0, \infty)$	$[\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$ αρκουντως μικρο
$f'''(x) = 1 > 0$, $x \in [0, \infty)$	